Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0\,,1\,,1)$, $B(1\,,2\,,0)$ et $C(-1\,,1\,,2)$

0.5 1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{\imath}+\vec{k}$

0.25 b) En déduire que : $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1\,,1\,,2)$ de rayon $R=\sqrt{2}$

Déterminer une équation de la sphère (S)

0.5 3) Montrer que le plan (ABC) et tangent à la sphère (S) au point A

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0.25 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0.5 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

0.5 c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\left(\vec{\imath}+\vec{k}\right)$

Exercice 2 (3 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixes $a=-1-i\sqrt{3}$ le point B d'affixe $b=-1+i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0.5 1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d=-2$

2) On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

0.5 Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=-4$

0.5 3) a) Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0,5 b) En déduire que : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2=\frac{c-d}{b-d}$

4) Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant au deux cercles (Γ) et (Γ')

0.25 a) Vérifier que : $|z+2|=2$

0.5 b) Prouver que ; $z+\overline{z}=-8$ (remarquer que $|z|=4$)

0.25 c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boule de l'urne.

0.75 1) Montrer que : $p(A)=\frac{1}{6}$; où A est l'événement « N'obtenir aucune boule rouge »

0.75 2) Calculer $p(B)$; où B est l'événement « Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes »

0.75 3) Montrer que : $p(C)=\frac{1}{2}$; où C est l'événement « Obtenir exactement une boules rouge »

0.75 4) Calculer $p(D)$; où D est l'événement « Obtenir au moins deux boules rouges »

Exercice 4 (2.5 points) :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)e^x$

0.75 1) a) Vérifier que : $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer : $I = \int_{-1}^{0} h(x)dx$

0.75 b) A l'aide d'une intégration par parties calculer : $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x \, dx$

0.5 2) a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y » - 2y' + y = 0$

0.5 b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Problème (8.5 points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ (unité : 1cm)

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat
3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

   b) Etudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)
4) a) Montrer que : $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

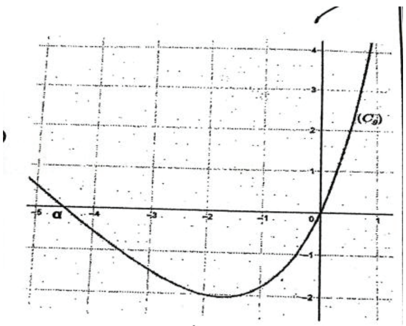
   b) Vérifier que : $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
5) a) Montrer que : $f"(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$;

   où $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

   b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g,
   Déterminer le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$ (Remarque que : $g(\alpha) = 0$)

   c) Etudier la concavité de la courbe (C_f) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexion



6) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$
   (On prend : $\ln(4) \simeq 1{,}4$, $\alpha \simeq -3{,}5$ et $f(\alpha) \simeq -3{,}5$)
7) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

   b) Calculer $(f^{-1})'(\ln(4))$
8) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   a) Montrer par récurrence que : $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

   d) Calculer la limite de la suite (u_n)